WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

Старые и новые трехмерные лабиринты

А.К. ДЬЮДНИ

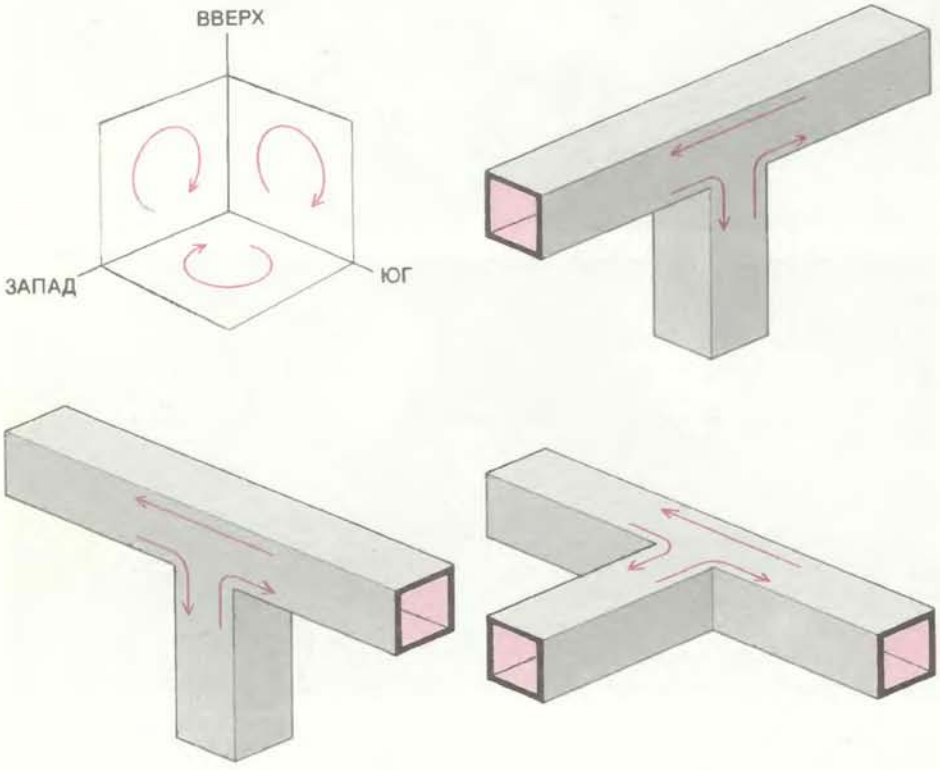
...лабиринт был построен Дедалом так искусно, что всякий, кто попадал туда, не мог самостоятельно найти выход.

Из древнегреческой мифологии

БОЛЬШИНСТВО лабиринтов двумерны, поэтому, глядя на них сверху, мы можем найти среди сложных извилин и поворотов путь к выходу. Однако на трехмерные лабиринты мы уже не можем, так сказать, посмотреть сверху, потому что верхние уровни лабиринта будут заслонять нижние. Таким образом, ничего не остается, как искать выход ощупью — либо буквально, либо в переносном смысле слова — в хитросплетениях проходов.

Существуют старые и новые трехмерные лабиринты. Судя по его легендарной сложности, древний лабиринт Дедала был, по-видимому, трехмерным. Царившая там кромешная тьма вынуждает применить некоторые методы поиска пути в лабиринте, включая модифицированную версию известного правила правой руки, используемого обычно при решении задач с двумерными лабиринтами. Что же касается современных лабиринтов, то в игрушках-головоломках, конструируемых М. Оскаром ван Девентером, лабиринты не только трехмерны, но и невидимы! Такие лабиринты приводят к увлекательной задаче восстановления: при каких условиях три двумерных лабиринта определяют единственным образом трехмерный лабиринт?

Дедал построил свой знаменитый лабиринт для Миноса, могущественного критского царя. Однако царю лабиринт понадобился вовсе не для развлечения. В него бросали семерых юношей и семерых девушек, ежегодно посылаемых на Крит жителями Афин в качестве дани. Никакие ухищрения не могли помочь беспомощным жертвам, кравшимся по сырым, темным проходам в поисках выхода. Но это было еще не самое страшное; в лабиринте обитало ужасное, свирепое чудовище — Минотавр. С головой человека и телом быка Минотавр пожирал несчастных афинян, блуждавших по лабиринту.



Тройное правило правой руки для трехмерных лабиринтов

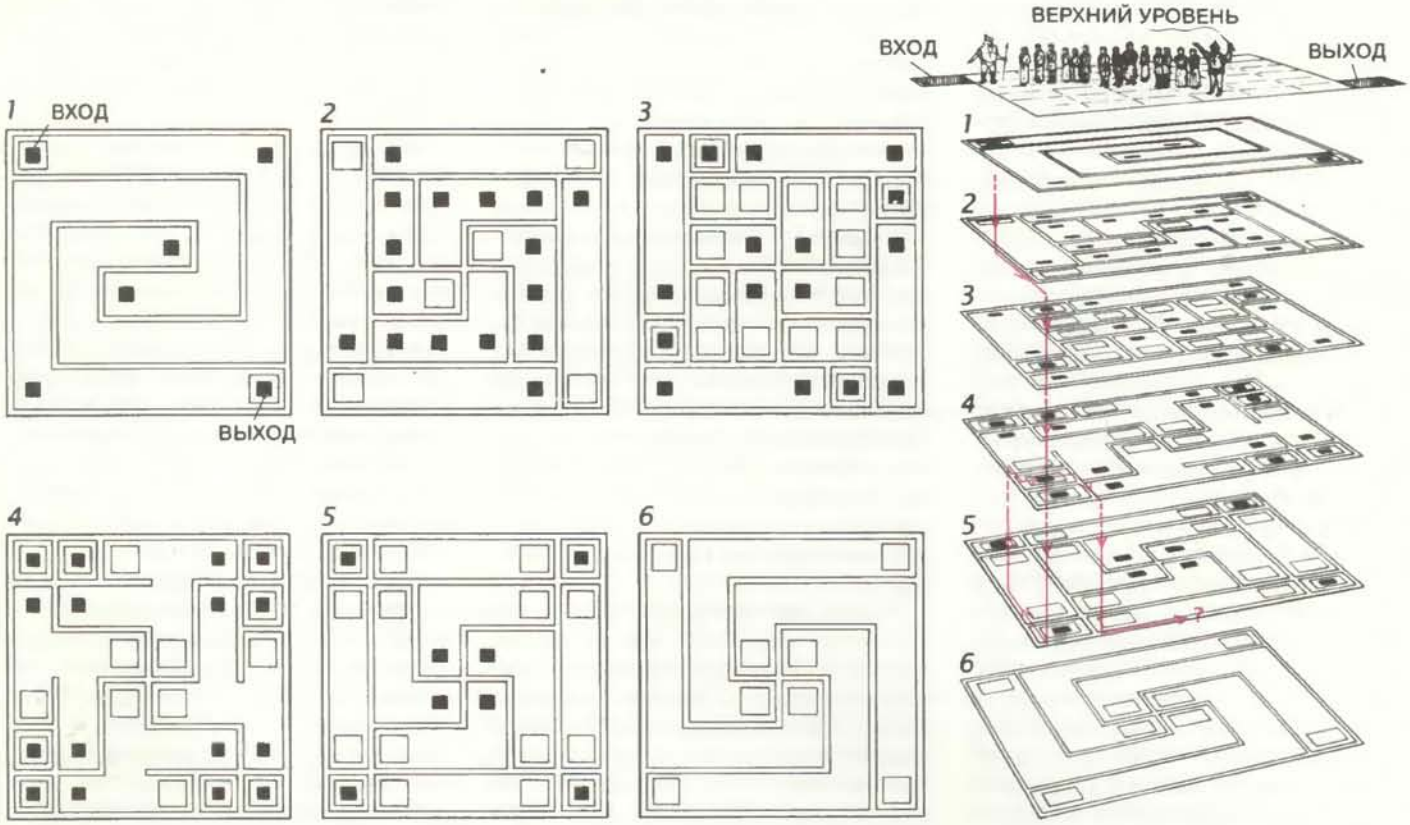
Лишь Тесею, прославленному герою греческих мифов, удалось решить загадку лабиринта и убить Минотавра. У входа в лабиринт он закрепил конец клубка, подаренного ему дочерью царя (которая, конечно, тайно любила его), и блуждая по переходам в поисках Минотавра, постепенно разматывал клубок. Убив чудовище, он, сматывая клубок, вышел наружу.

Ну а что бы случилось, если бы Тесей по рассеянности забыл закрепить конец нити перед тем, как войти в лабиринт? Сумел бы он выбраться из лабиринта? Например, он мог бы привязать нить к убитому Минотавру, перед тем как отправиться на поиски выхода. Это позволило бы ему по крайней мере возвращаться к одной и той же точке (к телу убитого чудовища) после каждой безуспешной вылазки в хитроумном лабиринте Дедала. Однако в этом случае сама нить не гарантировала бы, что поиски в конце концов увенчаются успехом. Каким образом Тесей запоминал бы проходы, которые он уже однажды исследовал?

Это зависит от того, какой памятью пользовался бы Тесей, внутренней или внешней? Пользуясь внутренней памятью, он мог бы запоминать в какую сторону поворачивал на каждом перекрестке. Прибегнув к внешней памяти, он мог бы оставлять какую-нибудь пометку на каждом пройденном пересечении, создавая таким образом запись своего маршрута. Лично я придерживаюсь мнения, что Тесей скорее воспользовался бы вторым видом памяти. Для удобства снабдим нашего героя достаточно большим количеством мелких монет, например, достоинством в одну драхму.

Каждый раз, подойдя к пересечению трех или более проходов, Тесей должен был внимательно осмотреть пол у входа в каждый проход. Если там лежала монетка, то ему не следовало входить в данный проход. Отсутствие же монетки означало, что проход еще не исследован и в него нужно войти. Войдя, он должен тотчас положить на пол монетку, так чтобы ее можно было заметить на пересечении. Некоторые читатели, без сомнения, возразят, что Тесей не мог видеть монеток, поскольку в лабиринте царила кромешная тьма. Логично

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU



Реконструкция лабиринта Дедала и один из возможных путей (выделен цветом)

поэтому снабдить его каким-нибудь зажигательным устройством, например газовой зажигалкой для сигарет.

Следуя предложенной выше процедуре, Тесей иногда вынужден был бы вернуться по уже пройденному маршруту. Например, в случае, если он натыкался на тупик или подходил к пересечению, у всех проходов которого уже лежали монетки. Может ли возникнуть такая ситуация, когда, возвращаясь назад, Тесей встречал бы только помеченные, т.е. запрещенные проходы? Другими словами, мог ли он попасть в бесконечный цикл? Чтобы не лишать удовольствия тех, кто любит поразмылить, я не дам ответа на этот вопрос. Достаточно сказать, что описанный метод широко применяется в современных компьютерных алгоритмах поиска в структурах данных. Он называется поиском в глубину.

Могло, однако случиться так, что у нашего неустрашимого героя не было с собой монеток или — еще хуже — зажигалки. Как бы он тогда решил задачу? К счастью, существует метод поиска пути в лабиринте, который не требует внешней памяти. Более того, следуя этому методу, Тесей утомил бы свой мозг ничуть не больше, чем при выполнении процедуры поиска в глубину. Этот метод я называю тройным правилом правой руки.

Обычно задачи с двумерными лабиринтами решаются с использованием так называемого правила правой руки: войдя в лабиринт, следует все время двигаться, придерживаясь правой стенки, независимо от поворотов и перекрестков. Если проход разветвляется, следует продолжить движение по правому коридору. Если вам встретился тупик, нужно просто развернуться и идти обратно, опять-таки придерживаясь правой стенки. В конце концов вы выйдете из лабиринта, но не обязательно через «выход», Если выход расположен в средней части лабиринта (как это часто бывает в лабиринтах, изображаемых на бумаге), то можно выйти и вернуться туда, откуда вы вошли в лабиринт, но, конечно, после многократного применения правила правой руки. Однако так или иначе вы должны выйти. Объяснение тут очень простое: следуя этому правилу, вы никогда не пройдете по одному и тому же пути. Но если ни один участок стены, ограничивающий контуры лабиринта, никогда не проходится повторно, то рано или поздно стена должна кончиться, и вы должны выйти наружу. (Исключение из этого правила имеет место лишь в том случае, когда стены лабиринта образуют замкнутую поверхность, но тогда в стене не будет ни одного проема, через который в лабиринт можно войти.)

В несколько видоизмененной форме правило правой руки можно применять и для решения задач с трехмерными лабиринтами, включая и страшный лабиринт царя Миноса. Чтобы упростить рассуждения, предположим, что все проходы лабиринта имеют квадратное сечение и идут по прямой линии везде, за исключением поворотов, где они образуют угол в 90°. Кроме того, будем считать, что проходы ориентированы строго с востока на запад, с севера на юг или сверху вниз и поэтому на пересечениях перпендикулярны друг другу. Будем далее предполагать, что возможны лишь два типа пересечений, там, где сходятся вместе три прохода: либо пересечение в виле буквы Т, либо трехгранный угол с тремя перпендикулярными друг к другу проходами.

А теперь я приглашаю читателей поблуждать вместе со мной по коридорам лабиринта, чтобы показать, что называется, на практике, как применяется тройное правило правой руки. Гироскопическая система нам не потребуется — гравитация всегда подскажет нам направления вверх и вниз. Четыре других направления мы должны запоминать, следя за поворотами, совершаемыми по ходу перемещений в трехмерном лабиринте. Например, если мы входим в лабиринт в направлении с запада на восток, то после поворота направо мы будем двигаться уже на юг, а после следующего поворота направо — на запад и т.д.

Тройное правило правой руки на пе-

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

ресечении типа Т следует применять лишь после того, как мы определим плоскость, в которой оно лежит, поскольку каждой из трех возможных плоскостей соответствует своя ориентация поворота (см. рисунок на с. 88). Представим себе часовой циферблат, лежащий в плоскости Т-пересечения. Мы произвольно назовем направление, в котором поворачивается часовая стрелка, «правым», и, перемещаясь по лабиринту, всегда будем поворачивать в этом направлении.

В трехгранных углах это правило нужно несколько модифицировать. (Постойте-ка, не Минотавр ли рычит там вдали?) Будем считать, что вертикальные проходы имеют направление 1, ориентированные с юга на север — направление 2, а с востока на запад — направление 3. Если мы приходим к пересечению, двигаясь в направлении 1, то нужно выйти из него в направлении 2. Если мы двигались в направлении 2, то выйти из узла следует в направлении 3. Но даже и Тесей, наверное, догадался бы, что, войдя в угловое пересечение в направлении 3, он должен покинуть его в направлении 1. Вот и все, что касается тройного правила правой руки.

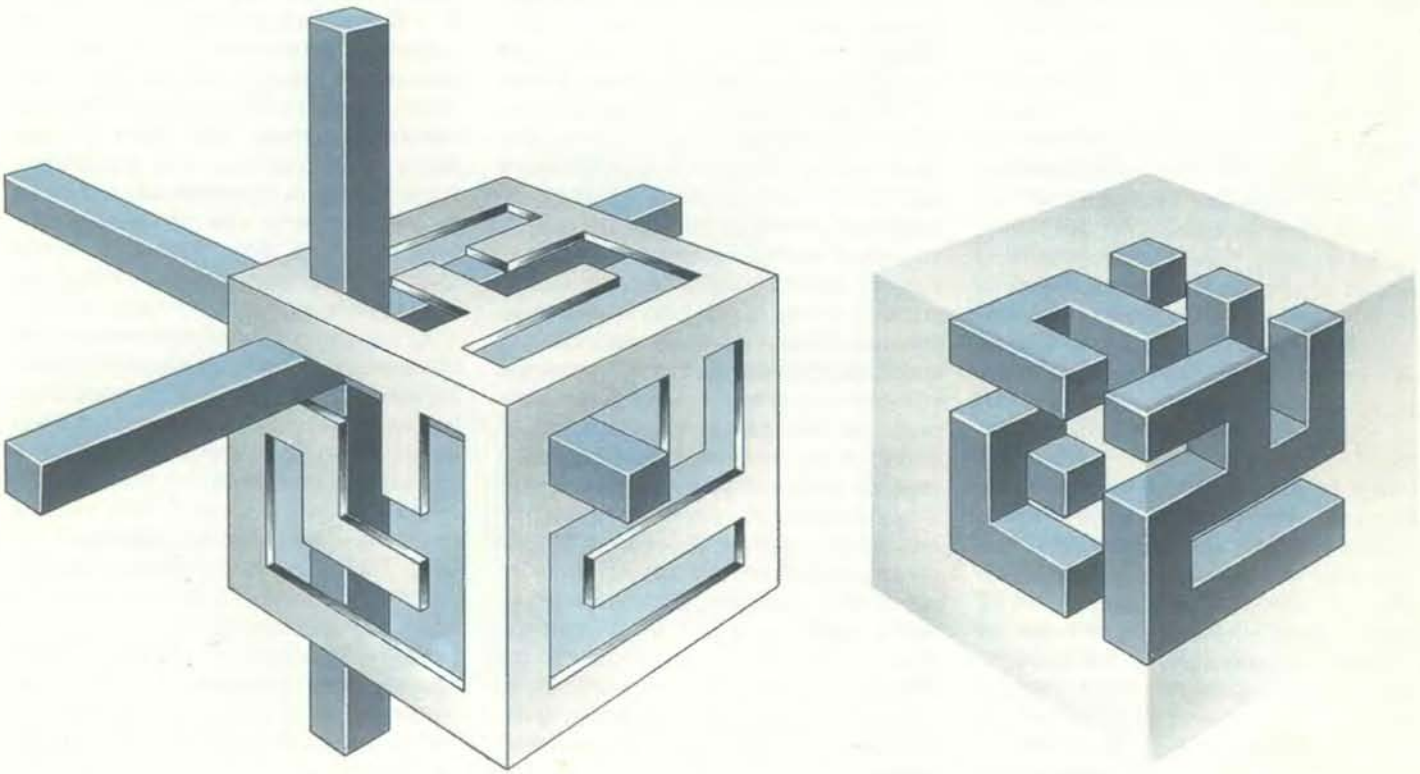
Оказывается, что правило удовлетворяет общему критерию решения задачи: ни один коридор не проходится дважды в одном и том же направлении. Однако гарантирует ли тройное правило правой руки окончательный успех? Я утверждаю, что да, но только в том случае, если в лабиринте существует лишь один путь, соединяющий вход и выход. Если лабиринт обладает бóльшим числом возможных решений, то я предсказываю, что рано или поздно вы выйдете из лабиринта — либо через вход, либо через выход.

Конечно, нет никакой гарантии, что Тесей вышел бы из лабиринта, начав следовать тройному правилу правой руки только после боя с Минотавром. Но если бы он начал пользоваться правилом с того момента, как вошел в лабиринт и сражение с Минотавром не нарушило бы его памяти, то он в конце концов обязательно вышел бы на свет гордым победителем. Тесею, наверное, было бы безразлично, откуда он вышел, из входа или из выхода.

Усвоив эти правила, читатели, несомненно, чувствуют себя готовыми попытаться решить задачу с трехмерным лабиринтом. Глубоко изучив вопрос, я предлагаю вам ни больше ни меньше как восстановленную модель древнего лабиринта Дедала. Модель показана на рис. с. 89. Все шесть уровней лабиринта находятся под землей. Самый верхний уровень (уровень 1) лежит непосредственно под тяжелыми каменными плитами двора царской резиденции. На месте двух отсутствующих плит зияют отверстия. К одному из этих отверстий читателя сопровождает дородный слуга царя Миноса. В конце концов читатель должен выйти из другого отверстия, представляющего собой выход из лабиринта. А между входом и выходом ему предстоит пережить ряд приключений, в том числе и неприятных.

Шесть уровней лабиринта отражают принцип его конструкции: это куб, вдоль каждого ребра которого размещается по шесть ячеек. Все горизонтальные коридоры изображены так же, как они обычно изображаются на схемах двумерных лабиринтов. Вертикальные же колодцы обозначены одиночными квадратами. Наш новоявленный Тесей может спуститься с одного уровня на другой, спрыгнув в отверстие, изображенное в виде черного квадрата. При этом он попадет в соответствующую ячейку прилегающего снизу уровня. На схеме читатель увидит несколько больший белый квадрат — это отверстие, через которое он попал на данный уровень. Когда читатель захочет подняться вверх, он должен добраться до ближайшего белого квадрата. Иногда можно увидеть черный квадрат внутри белого. Это означает, что из данного места в лабиринте можно двигаться и вверх, и вниз.

В лабиринте существует несколько возможных путей от входа к выходу. Некоторые читатели удовлетворятся, найдя один из них, другие же, возможно, захотят найти кратчайший путь, измеряемый количеством пройденных ячеек. Чтобы придать немного остроты вашим приключениям, я поселил в лабиринте Минотавра. Он



Простой лабиринт ван Девентера (слева) *и его проективный слепок* (справа).

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

всегда находится в том месте, где наверняка перехватит любого исследователя. В одной из наших будущих статей я назову имена первых пяти читателей, которые укажут это место.

Среди более современных лабиринтов заслуживают внимания лабиринты двух типов. Первые видимые, вторые невидимые. Видимый лабиринт — это пластмассовый куб, внутри которого тем или иным образом расположены стенки с отверстиями. Стальной шарик катается по проходам, создаваемым системой стенок. Играющий держит куб в руках, манипулируя им таким образом, чтобы шарик в конце концов достиг «финиша» — определенного места в кубе. В США такие лабиринты-игрушки, изготавливаемые компанией Milton Bradley, были популярны лет десять назад. Теперь в магазинах продается аналогичная головоломка под названием «Лабиринт Миллера».

Лабиринты другого современного типа рождаются в мастерской ван Девентера в Воорбурге (Голландия). Одну из своих игрушек-головоломок он называет полым лабиринтом. Это название вполне подходит для его лабиринтов, поскольку они представляют собой деревянные коробочки, внутри которых абсолютно ничего нет! Нет никаких проходов, никаких перегородок, и тем не менее этот ящичек является трехмерным лабиринтом.

Весь секрет в гранях коробочки. Они представляют собой двумерные «управляющие лабиринты»: деревянные поверхности с вырезанными в них пазами. Указатель-курсор, состоящий из трех взаимно перпендикулярных деревянных палочек, отмечает позицию в лабиринте, в которой находится играющий в данный момент. Каждая палочка курсора проходит от одной грани коробочки к другой — противоположной, скользя вдоль пазов управляющих лабиринтов каждой грани. Не удивительно поэтому, что два управляющих лабиринта на противоположных сторонах коробочки должны быть идентичными. Таким образом ван Девентеру удается построить один трехмерный лабиринт из трех пар двумерных лабиринтов.

В простом примере, показанном на с. 90, мы начинаем из положения, когда курсор находится в одном из углов, и пытаемся перевести его в противоположный угол. Каждая направляющая палочка вдвигается и выдвигается из коробочки, при этом автоматически перемещаются и две другие палочки (если это возможно физически) вдоль пазов в своих управляющих плоских лабиринтах. Может создаться впечатление, что для решения задачи с полым лабиринтом нужно просто решить частные задачи с каждым из трех управляющих лабиринтов. Однако это не так. Хотя задача для каждого управляющего лабиринта легко поддается решению, трехмерная задача для полого лабиринта оказывается не такой простой.

Сложность задачи в том, что перемещения, дозволенные в одном управляющем лабиринте, могут блокироваться в другом. Более того, не ясно, в каком порядке три стержня курсора должны вдвигаться и выдвигаться. Для каждого положения курсора может существовать сразу несколько дозволенных перемещений. Вообще, решая эту задачу, можно закрыть глаза и попытаться найти правильный путь «на ощупь». При этом невидимый лабиринт в коробочке приобретает новую, своего рода ощутимую реальность.

Невидимый лабиринт в принципе можно сделать и видимым, если продолжить пазы трех прилегающих друг к другу управляющих лабиринтов в сплошном кубе, сделанном из легко режущегося материала. Когда куб прорезан насквозь по всем контурам, материал, *не принадлежащий* проходам лабиринта, полностью удаляется. Конечно, контуры управляющих лабиринтов должны быть такими же, как у исходного лабиринта ван Девентера.

Поскольку описываемый процесс изготовления в значительной степени воображаемый, я, пожалуй, вооружусь для работы лазерной пилой. Установив пилу непосредственно над одной из граней куба, я буду просто проводить ею вдоль контуров управляющего лабиринта, прорезая куб насквозь. Когда вырезание закончено, я осторожно вытряхну остатки ненужного материала из куба. В результате в руках у меня останется трехмерная форма, соответствующая контурам управляющего лабиринта. Затем весь процесс повторяется для двух других граней куба, и получившееся тело представляет собой по существу «негатив» неявного лабиринта ван Девентера: дозволенные проходы представлены в нем сплошными колоннами и поперечными балками. Я назову его проективным слепком. Он изображен на рисунке на с. 90.

По поводу проективных слепков возникают два интригующих вопроса. Первый: когда три двумерных лабиринта определяют проективный слепок правильного трехмерного лабиринта? Второй: при каких условиях проективный слепок дает три проекции, каждая из которых представляет собой правильный двумерный лабиринт. Термин «правильный лабиринт» нуждается в уточнении. Он относится к лабиринту, все проходы которого имеют единичную ширину и в котором существует путь от точки «старта» до точки «финиша». (Правильный трехмерный лабиринт, получающийся из трех двумерных управляющих лабиринтов, мне кажется, следует называть лабиринтом ван Девентера.) Можно предложить и другие ограничения, но они, скорее, будут относиться к эстетическим аспектам того, что следует считать хорошим лабиринтом. Предложенного нами определения для начала будет вполне достаточно.

Поэкспериментировав даже с очень простыми управляющими лабиринтами, вы будете весьма удивлены тем, что получится в трех измерениях. Например, можно построить лабиринт ван Девентера из довольно тривиальных управляющих лабиринтов, сотоящих из клеточных матриц 3×3, в которых определенные прилегающие друг к другу клетки удалены. Возможно, читателям интересно будет начать с управляющих лабиринтов 3×3 с прорезями в виде буквы Г в различных ориентациях. Сколько результирующих комбинаций можно получить в соответствующих лабиринтах ван Девентера? Это один вопрос.

Второй вопрос противоположен первому: при каких условиях трехмерный лабиринт порождает три правильных управляющих лабиринта, которые являются его проекциями? Оба вопроса имеют для ван Девентера практическое значение. Ответ на любой из них существенно упрощает процесс конструирования его лабиринтов. Ван Девентер признается, что вырезал множество моделей, пытаясь создать более сложные полые лабиринты. Читателям, как всегда, предлагается самим поразмыслить над проблемами, возникающими в связи с конструированием лабиринтов ван Девентера. Наиболее интересные соображения по этому поводу мы опубликуем в одной из будущих статей нашей рубрики.

НЕВИДИМЫЙ профессор, о котором шла речь в июльском номере журнала, привел нам несколько классических примеров из бесконечного многообразия тригонометрических и алгебраических кривых. Некоторые читатели из числа многих, ранее уже знакомых с профессором, прислали интересные комментарии.

Э. Ашкинази из Белла (шт. Калифорния) предложил организовать встречу между невидимым профессором и «Люси» — цветным графопостроителем в математической лабора-

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NARODU.RU

тории Калифорнийского университета в Нотридже. Возможно, профессору понравятся фигуры Лиссажу в исполнении «Люси». У Ашкинази есть программа, которая рисует прямые линии между соответствующими точками пары таких фигур. С помощью этой программы «Люси» рисует немыслимые кривые с поблескивающей муаровой вуалью.

Т. Дорн из Ванкувера (Британская Колумбия) предлагает свою программу BUMBLEBEE (шмель). Она работает со следующими параметрическими уравнениями, в которых константу a можно варьировать:

$$x = 2\sin(at)$$
$$y = e^{t\sin t}.$$

Т. Фэй из Университета Южного Миссисипи коллекционирует кривые, полезные при изучении дифференциального и интегрального исчисления, которые он строит в полярных координатах (ρ, θ) вместо обычных координат (x, y). Профессор рисует бабочку с помощью синусоиды, косинусоиды и экспоненты:

$$\rho = e^{\cos\theta} - 2\cos(4\theta) + \sin^5(\theta/12).$$

В области математических кривых сейчас наблюдается бурная коммерческая и квазикоммерческая активность. Существует множество средств, которыми может воспользоваться любитель сложных криволинейных фигур. Например, Д. Кеннеди, школьный учитель математики из Лэнгли (Британская Колумбия) с энтузиазмом отзывается о калькуляторе-графопостроителе "Casio fx-7000G". Это чудо техники, которое можно держать в руке, демонстрирует миниатюрные ступеньчатые графики практически любой функции на экране размерами 3 × 5 см.

SPIA — по-видимому, весьма солидная математическая программа — позволяет пользователям строить и изображать функции почти любого вида. Более того, она выполняет специальные операции, такие как преобразование Фурье, для тех, кто интересуется основами обработки сигналов.

Наука и общество

Добрались до мозга костей

ПОСЛЕДНИЕ три десятилетия почти во всяком вводном курсе по биологии уделяется внимание стволовым клеткам — «незрелым», недифференцированным клеткам, находящимся в костном мозге, от которых происходят все разнообразные клетки крови. Впервые столкнувшись с изложением концепции стволовых клеток, можно подумать, что они получены в чистом виде и известно, как они выглядят под микроскопом. На самом деле на протяжении многих десятилетий исследователи не могли обнаружить эти клетки и имелись только косвенные доказательства их существования. И вот теперь стволовые клетки наконец удалось выявить. Это открытие многое сулит для лечения рака, лучевой болезни, гемофилии и анемии.

Дж. Спангруд, Ш. Хеймфелд и И. Вейссман из Медицинской школы Станфордского университета сообщают в журнале «Science», что им впервые удалось идентифицировать стволовые клетки. Когда эти исследователи начали свою работу, было известно, что стволовые клетки не имеют таких маркеров клеточной поверхности, какие свойственны зрелым клеткам крови, скажем эритроцитам или лимфоцитам. И они отобрали из костного мозга мыши все те клетки, которые связывают антитела к маркерным молекулам, характерным для различных клеток крови. Затем в оставшихся клетках была измерена специфическая активность стволовых клеток с тем, чтобы проверить, получена ли гомогенная популяция этих клеток или она «разбавлена» более зрелыми костно-мозговыми клетками.

Особенно впечатляет успех, достигнутый в следующем эксперименте. У мышей путем облучения подавили активность костного мозга, а затем каждой ввели 30 клеток, предположительно являющихся стволовыми. У половины животных восстановилась способность к образованию клеток крови всех типов.

Как говорит Хеймфелд, стволовые клетки было трудно идентифицировать потому, что их доля в костном мозге очень мала — 0,05%, и, кроме того, определяются они по большей части методом исключения, т.е. среди клеток костного мозга за стволовые принимаются те, которые не связывают антитела к клеткам крови. Чтобы подобрать оптимальную комбинацию антител, потребовалось 6 лет; окончательный этап отбора совершился при помощи препарата антител, который предоставили западногерманские ученые, изучающие Т-лимфоциты. Теперь, располагая чистой популяцией стволовых клеток, Хеймфелд намерена попытаться получить антитела, специфичные для самих стволовых клеток; такие антитела существенно облегчили бы и ускорили процедуру выделения.

Возможность выделения стволовых клеток позволяет разработать ряд потенциально эффективных лечебных методов. Эксперимент с облученными мышами продемонстрировал, что введение стволовых клеток должно помогать при лучевой болезни. В принципе можно было бы лечить и лейкозы: удалить у больного стволовые клетки, облучить его, чтобы убить раковые клетки, и затем ввести обратно стволовые клетки, из которых образуются недостающие нормальные клетки крови. Используя стволовые клетки, можно было бы корректировать врожденные анемию, гемофилию и иммунодефициты. Для этого часть популяции стволовых клеток больного надо соответствующим образом модифицировать при помощи методов генетической инженерии и ввести обратно в организм.

Прежде чем начать исследования с целью разработки таких методов лечения, необходимо выяснить, какие антитела специфичны для человеческих стволовых клеток. По мнению Хеймфелд, у разных видов млекопитающих маркеры стволовых клеток вряд ли сильно различаются, так что человеческие клетки, вероятно, можно было бы определять такими же антителами, что и мышиные. В Онкологическом центре Фреда Хатчинсона в Сиэтле группа исследователей получила антитела, избирательно связывающиеся с клетками костного мозга человека, и эти антитела спасали от гибели облученных обезьян. Исследователи из Станфордского университета вывели линию мышей, которых можно использовать для проверки активности стволовых клеток человека. Как считает Хеймфелд, все эти результаты позволяют предположить, что стволовые клетки человека будут выделены в ближайшие несколько лет.

Непостоянное Солнце

БОЛЕЕ 150 лет назад астрономы обнаружили, что солнечные пятна периодически возникают и пропадают, подчиняясь 11-летнему циклу. Одновременно возникло предположение, что солнечный цикл оказывает влияние на погоду. Например, уже в нашем веке ученые связывали засухи на американском Среднем Западе с периодичностью солнечной активности. До недавнего времени, впрочем, ни одна из таких связей при более пристальном анализе не подтвердилась.